Gerarchia Aritmetica e Gradi di Turing: Salti, Ipersalti e Definibilità in Seconda Aritmetica

Introduzione al Problema della Calcolabilità

La teoria della calcolabilità rappresenta uno dei pilastri fondamentali della logica matematica moderna e dell'informatica teorica. Nata dalle riflessioni filosofiche e matematiche degli anni Trenta del Ventesimo secolo, questa disciplina si è sviluppata attorno a una questione centrale: quali problemi possono essere risolti mediante procedure meccaniche e quali, invece, trascendono le capacità di qualsiasi algoritmo concepibile? La risposta a questa domanda apparentemente semplice ha rivelato una struttura di complessità stratificata e profondamente interconnessa, nella quale la gerarchia aritmetica e i gradi di Turing emergono come strumenti concettuali indispensabili per comprendere la natura stessa della computazione e della definibilità matematica.

Il contesto storico che ha dato origine a questi sviluppi è ricco di contributi da parte di alcuni dei più grandi matematici del secolo scorso. Alan Turing, con la sua celebre formalizzazione delle macchine che portano il suo nome, ha fornito una definizione precisa e operativa di che cosa significhi essere calcolabile. Contemporaneamente, Alonzo Church sviluppava il lambda calcolo, mentre Kurt Gödel elaborava le sue funzioni ricorsive. La tesi di Church-Turing, che afferma l'equivalenza sostanziale di queste diverse nozioni di calcolabilità, costituisce il fondamento concettuale su cui poggia l'intera disciplina. Tuttavia, ben presto divenne chiaro che la distinzione binaria tra calcolabile e non calcolabile era solo l'inizio di una classificazione molto più articolata delle funzioni e degli insiemi.

I Numeri Naturali come Universo di Riferimento

Prima di addentrarci nelle complessità della gerarchia aritmetica e dei gradi di Turing, è essenziale stabilire con precisione quale sia il nostro universo di discorso. Nella teoria della calcolabilità classica, ci concentriamo sui numeri naturali N = {0, 1, 2, 3, ...} e sui sottoinsiemi di N, nonché sulle funzioni da N^k a N per vari k. Questa scelta non è arbitraria: i numeri naturali costituiscono la struttura più semplice e fondamentale della matematica, e ogni oggetto discreto può essere codificato mediante numeri naturali attraverso opportune funzioni di numerazione di Gödel.

La scelta dei numeri naturali come dominio primario ha conseguenze profonde. In primo luogo, permette di ridurre questioni apparentemente eterogenee a questioni aritmetiche. Un programma per calcolatore, una formula logica, un grafo, una matrice: tutti questi oggetti possono essere rappresentati come numeri naturali mediante codifiche standard. Questa universalità della codifica aritmetica è ciò che rende la teoria della calcolabilità applicabile a

contesti apparentemente lontani dalla pura aritmetica. In secondo luogo, la struttura dei numeri naturali con le operazioni di addizione e moltiplicazione fornisce un linguaggio sufficientemente espressivo per formulare questioni di grande complessità, pur mantenendo una base assiomatica relativamente semplice.

La Nozione di Insieme Ricorsivo ed Enumerabile Ricorsivamente

Il punto di partenza per comprendere la gerarchia aritmetica è la distinzione fondamentale tra insiemi ricorsivi e insiemi ricorsivamente enumerabili. Un insieme A di numeri naturali è detto ricorsivo se esiste un algoritmo che, dato un qualsiasi numero naturale n, determina in tempo finito se n appartiene ad A oppure no. In termini più formali, A è ricorsivo se la sua funzione caratteristica chi_A, definita come chi_A(n) = 1 se n è in A e chi_A(n) = 0 altrimenti, è una funzione calcolabile nel senso di Turing.

Gli insiemi ricorsivamente enumerabili, invece, ammettono una caratterizzazione più debole. Un insieme A è ricorsivamente enumerabile se esiste un algoritmo che, ricevendo in input un numero n appartenente ad A, si ferma e conferma l'appartenenza, mentre per numeri che non appartengono ad A l'algoritmo può non terminare. Equivalentemente, A è ricorsivamente enumerabile se è il dominio di una funzione parziale calcolabile, oppure se è l'immagine di una funzione totale calcolabile. Questa asimmetria tra la risposta positiva e quella negativa è cruciale: possiamo enumerare gli elementi di A, ma non necessariamente decidere l'appartenenza.

La relazione tra queste due classi è stata chiarita dal celebre teorema di Post, il quale afferma che un insieme A è ricorsivo se e solo se sia A che il suo complemento N \ A sono ricorsivamente enumerabili. Questo risultato mette in evidenza come la ricorsività corrisponda a una forma di decidibilità completa, mentre l'enumerabilità ricorsiva rappresenti una decidibilità unilaterale. L'esempio paradigmatico di insieme ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo è il problema della fermata: l'insieme K = {e : la macchina di Turing con codice e si ferma su input e} è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo. Possiamo verificare che una macchina si ferma semplicemente simulandola, ma non possiamo in generale determinare se non si fermerà mai.

L'Emergere della Complessità Logica

La scoperta che esistono insiemi ricorsivamente enumerabili ma non ricorsivi ha aperto la strada a una domanda naturale: esistono gradazioni ulteriori di complessità al di là di questa distinzione? La risposta affermativa a questa domanda ha condotto allo sviluppo della gerarchia aritmetica, una stratificazione infinita degli insiemi di numeri naturali basata sulla complessità logica delle loro definizioni.

L'intuizione fondamentale è che possiamo classificare gli insiemi in base al numero e al tipo di quantificatori necessari per definirli. Un insieme è tanto più complesso quanto più quantificatori alternati richiede la sua definizione. Questa idea, apparentemente semplice, si rivela essere uno strumento di straordinaria potenza per organizzare e comprendere la struttura del mondo calcolabile e oltre.

La gerarchia aritmetica si articola in livelli denominati Sigma_n e Pi_n, dove n indica il numero di alternanze di quantificatori. Gli insiemi Sigma_0 e Pi_0 coincidono e corrispondono agli insiemi decidibili mediante un algoritmo, ovvero gli insiemi ricorsivi. Gli insiemi Sigma_1 sono quelli definibili mediante una formula con un quantificatore esistenziale seguito da una parte decidibile, e coincidono con gli insiemi ricorsivamente enumerabili. Procedendo verso l'alto nella gerarchia, ogni livello successivo introduce una nuova alternanza di quantificatori e corrisponde a un incremento genuino di complessità.

Il Ruolo della Seconda Aritmetica

Mentre la prima aritmetica riguarda le proprietà dei numeri naturali e le relazioni tra essi, la seconda aritmetica estende il linguaggio per includere quantificazione su insiemi di numeri naturali. Formalmente, la seconda aritmetica considera un linguaggio a due tipi: variabili individuali che variano su N e variabili del secondo ordine che variano su sottoinsiemi di N. Questa estensione apparentemente modesta ha conseguenze profonde per la teoria della definibilità.

Nella seconda aritmetica possiamo esprimere proprietà che nella prima aritmetica sarebbero inesprimibili. Ad esempio, possiamo definire la nozione di finito dicendo che un insieme X è finito se e solo se per ogni insieme Y che contiene lo zero e è chiuso per successore, se Y contiene tutti gli elementi di X allora Y coincide con N. Più in generale, la seconda aritmetica fornisce il contesto naturale per studiare la gerarchia aritmetica stessa, poiché i livelli della gerarchia possono essere caratterizzati mediante formule della seconda aritmetica con opportune restrizioni sui quantificatori.

Il sistema formale della seconda aritmetica ammette diverse varianti, ciascuna con proprietà logiche e computazionali caratteristiche. L'aritmetica di Peano del second'ordine completa, denotata con Z_2, include lo schema di comprensione completo, che asserisce l'esistenza di un insieme definito da qualsiasi formula del linguaggio. I sottosistemi più deboli, come ACA_0 (aritmetica comprensiva), RCA_0 (aritmetica ricorsiva comprensiva), o WKL_0 (lemma di König debole), corrispondono a frammenti della matematica classica e sono oggetto di studio nell'ambito della matematica inversa, un programma di ricerca che mira a determinare quali assiomi sono effettivamente necessari per dimostrare teoremi specifici.

Obiettivi e Struttura del Saggio

Questo saggio si propone di esplorare in profondità tre temi strettamente interconnessi: la gerarchia aritmetica come classificazione degli insiemi di numeri naturali in base alla complessità delle loro definizioni, i gradi di Turing come misura della complessità computazionale relativa, e le operazioni di salto e ipersalto che permettono di navigare attraverso livelli crescenti di non calcolabilità. Un filo conduttore unificante sarà il ruolo della seconda aritmetica come contesto formale nel quale questi concetti trovano la loro espressione più naturale e rigorosa.

Procederemo in modo graduale, costruendo ogni concetto sulle fondamenta stabilite in precedenza. Dopo aver introdotto con precisione la gerarchia aritmetica e dimostrato le sue proprietà fondamentali, esamineremo la teoria dei gradi di Turing, mostrando come questa fornisca una misura raffinata della complessità computazionale che va oltre la semplice

distinzione tra decidibile e indecidibile. Studieremo poi l'operazione di salto, che assegna a ogni insieme A un insieme A' strettamente più complesso, e la sua iterazione transfinita che conduce alla nozione di ipersalto. Infine, esploreremo le profonde connessioni tra questi concetti e la definibilità nella seconda aritmetica, mostrando come la gerarchia aritmetica, i gradi di Turing e le operazioni di salto siano tutte facce diverse dello stesso fenomeno matematico fondamentale.

Lungo il percorso, non mancheremo di evidenziare i risultati più importanti e sorprendenti, come il teorema della gerarchia che assicura che ogni livello della gerarchia aritmetica è genuinamente più ricco del precedente, il teorema di Post che caratterizza i gradi ricorsivamente enumerabili in termini della gerarchia aritmetica, e i teoremi di Shore e Slaman che rivelano la definibilità dell'ordinamento di Turing nella struttura dei gradi. Questi risultati non sono solo di interesse tecnico: illuminano la natura profonda della computazione e della definibilità matematica, rivelando connessioni inaspettate tra aspetti apparentemente disparati della logica matematica.

La Gerarchia Aritmetica in Dettaglio

Definizione Formale della Gerarchia Aritmetica

La gerarchia aritmetica fornisce una classificazione fine degli insiemi di numeri naturali basata sulla complessità logica delle formule che li definiscono. Per introdurla con rigore, dobbiamo prima precisare quale linguaggio stiamo utilizzando. Consideriamo il linguaggio della prima aritmetica, che include i simboli per l'addizione, la moltiplicazione, l'uguaglianza, le costanti zero e uno, e i quantificatori esistenziale ed universale che variano sui numeri naturali.

Una formula di questo linguaggio si dice limitata o Delta_0 se tutti i suoi quantificatori sono limitati, ovvero se ogni quantificatore esistenziale ha la forma "esiste x minore o uguale a t" e ogni quantificatore universale ha la forma "per ogni x minore o uguale a t", dove t è un termine che non contiene x. Le formule Delta_0 hanno una proprietà notevole: esse definiscono sempre insiemi ricorsivi, indipendentemente dalla loro complessità sintattica. Questo perché possiamo verificare una formula Delta_0 controllando un numero finito di casi, limitato dal valore dei termini che compaiono come bound dei quantificatori.

Procediamo ora alla definizione induttiva della gerarchia. Un insieme A di numeri naturali appartiene alla classe Sigma_n se esiste una formula Phi(x) della forma "esiste y_1 per ogni y_2 esiste y_3 ... Q_n y_n Psi(x, y_1, ..., y_n)" dove Q_n è un quantificatore esistenziale se n è dispari e universale se n è pari, e dove Psi è una formula Delta_0, tale che per ogni numero naturale m si ha m in A se e solo se Phi(m) è vera nell'aritmetica standard. Simmetricamente, A appartiene alla classe Pi_n se esiste una formula della forma "per ogni y_1 esiste y_2 per ogni y_3 ... Q_n y_n Psi(x, y_1, ..., y_n)" che definisce A.

Un insieme appartiene alla classe Delta_n se appartiene sia a Sigma_n che a Pi_n. È immediato dalla definizione che Delta_n è contenuto in Sigma_n e in Pi_n per ogni n, e che Sigma_n e Pi_n sono chiusi per unione finita e intersezione finita. Inoltre, se A è in Sigma_n allora il suo complemento è in Pi_n e viceversa, poiché negare una formula equivale a scambiare i quantificatori esistenziali con quelli universali e negare la matrice.

Proprietà di Chiusura e Teoremi Fondamentali

Le classi della gerarchia aritmetica godono di importanti proprietà di chiusura che ne fanno strutture algebricamente ben comportate. Abbiamo già menzionato la chiusura per unioni e intersezioni finite. Possiamo estendere questa osservazione: Sigma_n è chiusa per unioni numerabili, mentre Pi_n è chiusa per intersezioni numerabili. Questo segue dal fatto che possiamo codificare una sequenza di numeri naturali mediante un unico numero naturale utilizzando la funzione di accoppiamento di Cantor o altre codifiche standard.

Più precisamente, se {A_i : i in N} è una famiglia numerabile di insiemi in Sigma_n, allora l'unione di tutti gli A_i appartiene ancora a Sigma_n. Infatti, se A_i è definito dalla formula "esiste y_1 per ogni y_2 ... Q_n y_n Psi_i(x, y_1, ..., y_n)", allora l'unione è definita da "esiste z [i = pi_1(z) e esiste y_1 per ogni y_2 ... Q_n y_n Psi_i(x, y_1, ..., y_n)]" dove pi_1 è la proiezione sulla prima coordinata della funzione di accoppiamento. Il quantificatore esistenziale esterno "esiste z" assorbe il quantificatore esistenziale interno, mantenendo il numero totale di alternanze.

Un teorema fondamentale nella teoria della gerarchia aritmetica è il teorema della gerarchia, che afferma che le inclusioni tra le varie classi sono tutte proprie. Formalmente, per ogni n maggiore o uguale a zero, esistono insiemi in Sigma_{n+1} che non appartengono a Pi_n, ed esistono insiemi in Pi_{n+1} che non appartengono a Sigma_n. Di conseguenza, Delta_n è strettamente contenuto in Delta_{n+1} per ogni n. Questo risultato garantisce che la gerarchia non collassa e che ogni livello introduce genuinamente nuova complessità definizionale.

La dimostrazione del teorema della gerarchia si basa su un argomento diagonale reminiscente della dimostrazione dell'indecidibilità del problema della fermata. Per costruire un insieme in Sigma_{n+1} \ Pi_n, consideriamo l'insieme di tutti gli indici e tali che la formula Sigma_{n+1} con codice e, valutata sull'input e stesso, è falsa secondo una certa enumerazione standard delle formule Sigma_{n+1}. Questo insieme è definibile da una formula Sigma_{n+1} per costruzione, ma non può essere definito da alcuna formula Pi_n, altrimenti otterremmo una contraddizione diagonalizzando.

Relazioni con la Calcolabilità

Uno degli aspetti più affascinanti della gerarchia aritmetica è la sua stretta connessione con la teoria della calcolabilità. Il livello Delta_1 coincide esattamente con la classe degli insiemi ricorsivi: un insieme è decidibile da un algoritmo se e solo se è definibile sia da una formula Sigma_1 che da una formula Pi_1. Questa coincidenza non è accidentale, ma riflette una profonda corrispondenza tra complessità logica e complessità computazionale.

Il livello Sigma_1 corrisponde agli insiemi ricorsivamente enumerabili. Un insieme A è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste una formula della forma "esiste y Psi(x, y)" con Psi ricorsiva che definisce A. L'intuizione è chiara: affermare che x appartiene ad A equivale a dire che esiste un testimone y verificabile in modo ricorsivo. Questo testimone può essere pensato come una computazione che certifica l'appartenenza di x ad A.

Il livello Pi_1 consiste negli insiemi co-ricorsivamente enumerabili, ovvero i complementi degli insiemi ricorsivamente enumerabili. Una formula Pi_1 ha la forma "per ogni y Psi(x, y)"

con Psi ricorsiva, e afferma che ogni possibile oggetto y soddisfa una certa proprietà verificabile. Esempi paradigmatici includono l'insieme delle macchine di Turing che si fermano su ogni input, o l'insieme dei programmi che calcolano funzioni totali.

Procedendo verso l'alto nella gerarchia, ogni livello Sigma_n può essere caratterizzato operazionalmente mediante oracoli. Un insieme A appartiene a Sigma_n se e solo se è ricorsivamente enumerabile relativizzato a un oracolo che appartiene al livello Delta_{n-1}. Questa caratterizzazione ricorsiva rivela che la gerarchia aritmetica può essere vista come una gerarchia di relativisazioni successive della nozione di enumerabilità ricorsiva.

La Post Hierarchy e Completezza

All'interno di ogni livello della gerarchia aritmetica esistono insiemi particolarmente complessi, detti completi per quel livello. Un insieme A è Sigma_n-completo se A appartiene a Sigma_n e se ogni insieme in Sigma_n è riducibile a A mediante una riduzione calcolabile. Più precisamente, A è Sigma_n-completo se per ogni B in Sigma_n esiste una funzione calcolabile f tale che per ogni x si ha x in B se e solo se f(x) in A.

L'esistenza di insiemi completi per ogni livello è garantita da argomenti di enumerazione. Possiamo costruire esplicitamente un insieme Sigma_n-completo considerando l'insieme universale per Sigma_n, ovvero l'insieme delle coppie (e, x) tali che la formula Sigma_n con codice e, valutata su x, è vera. Questo insieme è manifestamente in Sigma_n per definizione della classe, e ogni altro insieme in Sigma_n si riduce ad esso mediante una riduzione che calcola il codice della formula che lo definisce.

Gli insiemi completi giocano un ruolo cruciale nella teoria perché forniscono esempi canonici di massima complessità per ogni livello. Se dimostriamo che un problema specifico è Sigma_n-completo, sappiamo che non può appartenere a Pi_{n-1} a meno che la gerarchia non collassi a quel livello, il che è escluso dal teorema della gerarchia. Questo fornisce un metodo per stabilire lower bound sulla complessità definizionale.

Esempi naturali di insiemi completi abbondano nella matematica e nell'informatica. L'insieme K = {e : la macchina con codice e si ferma su input e} è Sigma_1-completo, come abbiamo già menzionato. L'insieme Tot = {e : la macchina con codice e calcola una funzione totale} è Pi_2-completo. L'insieme Inf = {e : la macchina con codice e si ferma su infiniti input} è Sigma_2-completo. Ciascuno di questi insiemi cattura un aspetto fondamentale della computazione e la sua posizione nella gerarchia riflette la difficoltà intrinseca del problema.

Forme Normali e Teoremi di Rappresentazione

Un risultato tecnico importante ma estremamente utile è l'esistenza di forme normali per le formule aritmetiche. Il teorema di forma normale di Kleene afferma che ogni insieme ricorsivamente enumerabile può essere rappresentato nella forma {x : esiste y T(e, x, y)} dove T è un predicato ricorsivo ternario, detto predicato di Kleene, ed e è un indice fisso che dipende dall'insieme. Il predicato T(e, x, y) è vero se y codifica una computazione accettante della macchina con codice e sull'input x.

Questo teorema ha generalizzazioni per tutti i livelli della gerarchia. Per Sigma_n, esiste un predicato Delta_0 universale T_n tale che ogni insieme A in Sigma_n può essere scritto

come {x : esiste y_1 per ogni y_2 ... Q_n y_n T_n(e, x, y_1, ..., y_n)} per qualche indice e. La forma normale permette di lavorare con rappresentazioni standard degli insiemi aritmetici, semplificando molte dimostrazioni.

Un'altra forma di rappresentazione importante riguarda i grafi delle funzioni. Ogni funzione parziale calcolabile f ha un grafo Graph(f) = {(x, y) : f(x) è definito e uguale a y} che appartiene a Sigma_1. Viceversa, ogni insieme Sigma_1 può essere visto come il dominio di una funzione parziale calcolabile. Questa corrispondenza tra funzioni parziali calcolavili e insiemi Sigma_1 è alla base di molti risultati nella teoria della calcolabilità.

Quantificatori Limitati e Gerarchia di Grzegorczyk

Un aspetto sottile ma importante riguarda il ruolo dei quantificatori limitati nella gerarchia. Abbiamo definito le formule Delta_0 come quelle con tutti i quantificatori limitati. È naturale chiedersi se aggiungere quantificatori limitati a una formula cambi il suo livello nella gerarchia. La risposta è negativa: una formula con n alternanze di quantificatori illimitati seguiti da quantificatori limitati arbitrari rimane al livello Sigma_n o Pi_n della gerarchia.

Questo fatto permette di raffinare la gerarchia introducendo la cosiddetta gerarchia di Grzegorczyk, che distingue tra formule in base al numero di quantificatori limitati oltre a quelli illimitati. Sebbene tutte queste raffinazioni non cambino le classi di insiemi definibili al livello Sigma_n, esse hanno importanza per lo studio della complessità delle dimostrazioni e per la teoria della complessità computazionale, dove i quantificatori limitati corrispondono a iterazioni limitate in altezza.

Insiemi Aritmetici e Non Aritmetici

L'unione di tutti i livelli della gerarchia aritmetica forma la classe degli insiemi aritmetici. Un insieme A è aritmetico se appartiene a Sigma_n o Pi_n per qualche n finito. Equivalentemente, A è aritmetico se è definibile da una formula della prima aritmetica con quantificatori sui numeri naturali. La classe degli insiemi aritmetici gode di eccellenti proprietà di chiusura: è chiusa per operazioni booleane, proiezioni e sostituzioni con funzioni ricorsive.

Tuttavia, non tutti gli insiemi di numeri naturali sono aritmetici. Esistono insiemi che richiedono quantificazione su insiemi per essere definiti, e quindi non possono essere catturati da formule della prima aritmetica. Un esempio classico è l'insieme dei codici di Gödel delle formule aritmetiche vere nell'aritmetica standard, spesso denotato Th(N). Questo insieme non è aritmetico, come conseguenza del teorema di incompletezza di Gödel: se fosse aritmetico, sarebbe ricorsivamente enumerabile relativizzato a qualche oracolo finito, ma questo contraddirebbe l'incompletezza.

La distinzione tra aritmetico e non aritmetico è fondamentale perché separa ciò che può essere definito in un linguaggio del primo ordine da ciò che richiede risorse espressive più potenti. La gerarchia aritmetica esaurisce la complessità definizionale del primo ordine sui numeri naturali, ma per andare oltre dobbiamo passare alla seconda aritmetica o a linguaggi ancora più ricchi.

Applicazioni della Gerarchia Aritmetica

La gerarchia aritmetica trova applicazioni in numerosi ambiti della logica matematica e dell'informatica teorica. In teoria dei modelli, i teoremi di preservazione mettono in relazione proprietà sintattiche delle formule con proprietà semantiche delle strutture che le soddisfano. Ad esempio, il teorema di Lyndon afferma che una formula è preservata per omomorfismi se e solo se è equivalente a una formula esistenziale positiva. Versioni analoghe di questi risultati valgono per le classi Sigma_n e Pi_n.

In teoria della dimostrazione, la gerarchia aritmetica permette di classificare la complessità degli enunciati matematici e di studiare quali principi logici sono necessari per dimostrarli. Il programma della matematica inversa, sviluppato principalmente da Harvey Friedman e Stephen Simpson, utilizza la gerarchia aritmetica per analizzare quali assiomi set-teoretici sono effettivamente necessari per dimostrare teoremi classici dell'analisi, della topologia e dell'algebra.

In teoria della complessità computazionale, la gerarchia aritmetica fornisce un modello teorico per comprendere la complessità di problemi che richiedono risorse illimitate. Sebbene la teoria della complessità si concentri tipicamente su problemi decidibili con risorse limitate, la struttura della gerarchia aritmetica offre intuizioni preziose sui limiti intrinseci della computazione e sulla natura dei problemi difficili.

Gradi di Turing e Struttura della Riducibilità

La Nozione di Riducibilità di Turing

Mentre la gerarchia aritmetica classifica gli insiemi in base alla complessità delle loro definizioni, i gradi di Turing forniscono una misura della complessità computazionale relativa. L'idea fondamentale è semplice ma potente: un insieme A è riducibile a un insieme B, scritto A minore o uguale_T B, se esiste un algoritmo che calcola A utilizzando B come oracolo. In altre parole, A può essere calcolato da una macchina di Turing che ha accesso illimitato e istantaneo alle risposte circa l'appartenenza a B.

Più formalmente, consideriamo una macchina di Turing modificata che, oltre alle operazioni standard, può eseguire interrogazioni a un oracolo. Quando la macchina interroga l'oracolo su un numero n, riceve immediatamente la risposta se n appartiene a B oppure no. Diciamo che A è Turing riducibile a B se esiste una tale macchina con oracolo B che, su ogni input n, si ferma e produce la risposta corretta circa l'appartenenza di n ad A.

La riducibilità di Turing è una relazione riflessiva e transitiva: ogni insieme è riducibile a sé stesso, e se A è riducibile a B e B è riducibile a C, allora A è riducibile a C. Tuttavia, non è una relazione antisimmetrica: possono esistere insiemi A e B distinti tali che A minore o uguale_T B e B minore o uguale_T A. Quando questo accade, diciamo che A e B sono Turing equivalenti e scriviamo A equivalente_T B.

Gradi di Turing come Classi di Equivalenza

L'equivalenza di Turing è una relazione di equivalenza che partiziona tutti gli insiemi di numeri naturali in classi chiamate gradi di Turing. Il grado di Turing di un insieme A, denotato deg(A) o semplicemente a quando non c'è ambiguità, è la classe di tutti gli insiemi Turing equivalenti ad A. L'ordinamento parziale indotto sui gradi è ben definito: diciamo che a minore o uguale b se esiste un rappresentante A in a e un rappresentante B in b tali che A minore o uguale_T B.

La struttura D dei gradi di Turing con questo ordinamento è un oggetto matematico estremamente ricco e complesso. È un insieme parzialmente ordinato che contiene un elemento minimo, il grado zero denotato 0, che consiste di tutti gli insiemi ricorsivi. Oltre al grado zero, esistono infiniti gradi incomparabili: gradi a e b tali che né a minore o uguale b né b minore o uguale a. L'esistenza di gradi incomparabili fu dimostrata da Kleene e Post negli anni Cinquanta mediante una costruzione ingenosa nota come metodo delle priorità.

Un aspetto sorprendente della struttura dei gradi è la sua omogeneità locale combinata con la sua complessità globale. Localmente, attorno a ogni grado, la struttura sembra avere sempre la stessa forma: per ogni grado a esistono gradi incomparabili sopra a, esistono catene crescenti e decrescenti, esistono gradi minimali sopra a. Globalmente, tuttavia, la struttura è incredibilmente complicata: non è nemmeno decidibile in quale relazione stanno due gradi dati, e molte questioni naturali sulla struttura si sono rivelate indipendenti dagli assiomi standard della teoria degli insiemi.

Riduzioni Many-One e Gradi Many-One

Prima di approfondire lo studio dei gradi di Turing, è utile confrontarli con una nozione di riducibilità più restrittiva ma tecnicamente più semplice. La riducibilità many-one, introdotta da Post, richiede che A sia riducibile a B mediante una funzione calcolabile totale f tale che per ogni x si abbia x in A se e solo se f(x) in B. In altre parole, l'appartenenza ad A è computazionalmente equivalente all'appartenenza a B tramite una trasformazione degli input.

La riducibilità many-one è strettamente più restrittiva della riducibilità di Turing: se A è many-one riducibile a B, allora A è certamente Turing riducibile a B, ma il viceversa non vale in generale. I gradi indotti dalla riducibilità many-one formano una struttura più semplice dei gradi di Turing, ma meno fine: esistono insiemi Turing equivalenti che non sono many-one equivalenti.

Un vantaggio importante della riducibilità many-one è che preserva molte proprietà strutturali. Se A è many-one riducibile a B e B è ricorsivamente enumerabile, allora anche A è ricorsivamente enumerabile. Se B è ricorsivo, allora anche A è ricorsivo. Queste preservazioni non valgono per la riducibilità di Turing: un insieme può essere Turing riducibile a un insieme ricorsivamente enumerabile senza essere esso stesso ricorsivamente enumerabile.

Il Teorema di Friedberg-Muchnik

Uno dei risultati più celebri nella teoria dei gradi di Turing è il teorema di Friedberg-Muchnik, che stabilisce l'esistenza di due gradi ricorsivamente enumerabili incomparabili. Prima di

questo risultato, dimostrato indipendentemente da Friedberg e Muchnik nel millenovecentocinquantasette, era aperta la questione se tutti i gradi ricorsivamente enumerabili fossero comparabili, ovvero se per ogni coppia di gradi r.e. a e b si avesse a minore o uguale b oppure b minore o uguale a.

La dimostrazione del teorema di Friedberg-Muchnik introduce una tecnica fondamentale nota come metodo delle priorità finite. L'idea è di costruire due insiemi ricorsivamente enumerabili A e B simultaneamente, enumerando i loro elementi in stadi successivi. A ogni stadio, dobbiamo soddisfare infiniti requisiti: requisiti che garantiscono che A non sia riducibile a B e requisiti che garantiscono che B non sia riducibile a A. Assegniamo a ogni requisito una priorità e lavoriamo per soddisfare i requisiti in ordine di priorità decrescente.

Il metodo delle priorità, nelle sue varie incarnazioni (finite, infinite, con injury limitato, con injury infinito), è diventato lo strumento principale per la costruzione di insiemi con proprietà specifiche nella teoria della calcolabilità. Virtualmente ogni risultato significativo sui gradi di Turing dimostrato dopo il millenovecentocinquantasette fa uso di qualche variante di questo metodo. La complessità tecnica di queste costruzioni può essere considerevole, ma il principio unificante rimane: soddisfare requisiti in competizione mediante azioni coordinate distribuite su infiniti stadi.

Gradi Minimali e Massimali

Un grado a maggiore di zero è detto minimale se non esiste alcun grado b strettamente compreso tra zero e a, ovvero se per ogni b tale che zero minore o uguale b minore o uguale a si ha b uguale zero oppure b uguale a. L'esistenza di gradi minimali fu dimostrata da Spector nel millenovecentocinquantasei, utilizzando una costruzione basata sul metodo delle priorità. Un grado minimale rappresenta una forma di complessità computazionale irriducibile: non ammette stratificazioni intermedie.

Simmetricamente, potremmo chiederci se esistano gradi massimali, ovvero gradi a minori del grado di K (il problema della fermata) tali che non esistono gradi strettamente compresi tra a e il grado di K. La risposta a questa domanda dipende crucialmente dalla classe di gradi considerata. Nella classe di tutti i gradi di Turing non esistono gradi massimali sotto il salto di zero, come dimostrato da Spector. Tuttavia, nella classe dei gradi ricorsivamente enumerabili, l'esistenza di gradi massimali sotto zero' (il salto del grado zero) rimane un problema aperto di grande difficoltà.

Embeddings e Anti-embeddings

Una domanda naturale nella teoria dei gradi riguarda quali strutture matematiche possono essere "embedded" nella struttura dei gradi, ovvero realizzate come sottostrutture preservando l'ordinamento. Per esempio, possiamo embedding l'ordinamento dei numeri naturali nei gradi di Turing? La risposta è affermativa: esiste una catena crescente infinita di gradi zero minore a_0 minore a_1 minore a_2 minore ... senza upper bound. Anzi, esistono catene di qualsiasi tipo d'ordine.

Risultati più sofisticati riguardano l'embedding di reticoli specifici. Lachlan e Lerman hanno studiato estensivamente quali reticoli finiti possono essere embedded nei gradi

ricorsivamente enumerabili. Sorprendentemente, non tutti i reticoli finiti sono embeddable: esistono reticoli finiti la cui struttura è troppo rigida per essere realizzata tra i gradi r.e. Questo fenomeno rivela che, nonostante la sua ricchezza, la struttura dei gradi r.e. ha vincoli intrinseci che ne limitano la flessibilità.

Automorphismi e Definibilità

Una questione fondamentale riguarda gli automorphismi della struttura dei gradi di Turing: esistono permutazioni non banali dei gradi che preservano l'ordinamento? In altre parole, la struttura dei gradi è rigida oppure ammette simmetrie non triviali? Per lungo tempo questa è stata una delle domande aperte più importanti nella teoria dei gradi.

Un automorphismo phi della struttura D mappa ogni grado a in un grado phi(a) preservando l'ordinamento: se a minore o uguale b allora phi(a) minore o uguale phi(b), e viceversa. Gli automorphismi banali sono quelli che fissano tutti i gradi tranne al più un numero finito. La questione degli automorphismi non banali è stata risolta in modo spettacolare da Slaman e Woodin, che hanno dimostrato che l'unico automorphismo della struttura dei gradi r.e. è l'identità. Questo risultato implica che ogni relazione definibile nell'aritmetica del second'ordine è invariante sotto gli automorphismi dei gradi r.e.

Strettamente connessa alla questione degli automorphismi è quella della definibilità. Un insieme di gradi è definibile se può essere caratterizzato mediante una formula della logica del primo ordine nel linguaggio dell'ordinamento parziale. Per esempio, il grado zero è definibile come l'unico elemento minimo della struttura. Il salto è una operazione definibile? Questa domanda ha avuto una risposta affermativa grazie al lavoro di Shore e Slaman, che hanno dimostrato che l'operazione di salto è definibile nei gradi r.e. Questo risultato profondo mostra che l'intera gerarchia aritmetica è in qualche senso codificata nella struttura puramente ordinale dei gradi r.e.

Cupping, Capping e Altre Proprietà Combinatorie

Nella teoria dei gradi di Turing, diverse proprietà combinatorie hanno acquisito importanza per la loro connessione con questioni di definibilità e per il loro interesse intrinseco. Un grado a è detto cuppable se esiste un grado b incomparabile con a tale che il supremo di a e b è il salto di zero. Simmetricamente, a è cappable se esiste b incomparabile con a tale che l'infimo di a e b è zero.

La classe dei gradi cuppable e quella dei gradi cappable hanno strutture complesse e non coincidono. Esistono gradi cuppable non cappable e gradi cappable non cuppable. Posner ha dimostrato che ogni grado r.e. non ricorsivo è cuppable, un risultato che illustra la ricchezza della struttura superiore dei gradi r.e. Sacks ha studiato i gradi cappable, mostrando connessioni con la costruzione di successioni minimali.

Densità e Undecidibilità

La struttura dei gradi di Turing è densa: per ogni coppia di gradi a minore di b, esiste un grado c strettamente compreso tra a e b. Questo risultato, dimostrato da Sacks, mostra che non esistono "salti" nell'ordinamento dei gradi: tra due gradi distinti c'è sempre una infinità di

gradi intermedi. La densità ha conseguenze importanti per la complessità della struttura: implica che l'ordinamento non può essere ben fondato tranne che sotto il grado zero.

Un risultato fondamentale di natura negativa riguarda la decidibilità della teoria dei gradi. Simpson ha dimostrato che la teoria del primo ordine della struttura dei gradi di Turing è indecidibile, anzi è aritmeticamente completa. Questo significa che non esiste alcun algoritmo per determinare se una data formula del primo ordine è vera nella struttura dei gradi. Anzi, il problema è difficile quanto il problema di determinare la verità nell'aritmetica standard, che sappiamo essere impossibile per il teorema di Tarski.

L'Operazione di Salto e la Gerarchia dei Salti

Definizione e Motivazione del Salto

L'operazione di salto è uno degli strumenti più potenti e illuminanti nella teoria della calcolabilità. Data un insieme A di numeri naturali, il salto di A, denotato A', è definito come l'insieme dei numeri e tali che la macchina di Turing con codice e, computando con oracolo A, si ferma sull'input e. In formule, A' = {e : phi_e^A(e) converge}, dove phi_e^A denota la funzione parziale calcolata dalla e-esima macchina di Turing con oracolo A.

Questa definizione è la relativizzazione del problema della fermata: mentre K = insieme vuoto' è il problema della fermata ordinario, A' rappresenta il problema della fermata relativizzato all'oracolo A. Il salto cattura l'idea di "un livello superiore di non calcolabilità": se A rappresenta un certo grado di complessità computazionale, allora A' rappresenta un grado strettamente maggiore, corrispondente ai problemi che richiedono non solo l'accesso ad A ma anche la capacità di risolvere questioni di fermata riguardanti computazioni che usano A.

La motivazione per studiare il salto viene da diverse direzioni. Dal punto di vista della gerarchia aritmetica, il salto fornisce un modo canonico per salire di un livello: se A è Delta_n, allora A' è Sigma_n-completo. Dal punto di vista dei gradi di Turing, il salto è una operazione che assegna a ogni grado a un grado a' strettamente maggiore, permettendo di costruire gerarchie infinite di gradi sempre più complessi. Dal punto di vista della logica, il salto corrisponde all'aggiunta di un quantificatore esistenziale non limitato a una definizione.

Proprietà Fondamentali del Salto

Il salto gode di numerose proprietà che lo rendono uno strumento matematico estremamente maneggevole. Prima di tutto, è monotono: se A è Turing riducibile a B, allora A' è Turing riducibile a B'. Questo segue direttamente dalla definizione, poiché una computazione con oracolo A può essere simulata da una computazione con oracolo B se A minore o uguale_T B. Di conseguenza, il salto induce una operazione ben definita sui gradi di Turing: se a = deg(A), definiamo a' = deg(A'), e questa definizione non dipende dal rappresentante scelto.

In secondo luogo, il salto è strettamente crescente: per ogni insieme A si ha A minore_T A'. Infatti, A è riducibile ad A' perché possiamo decidere se n appartiene ad A costruendo una macchina che con oracolo A testa semplicemente l'appartenenza di n ad A e si ferma se e solo se n è in A. Ma A' non è riducibile ad A, altrimenti otterremmo una contraddizione

diagonalizzando: potremmo costruire una macchina che con oracolo A decide se essa stessa si ferma, il che è impossibile.

Una proprietà più sottile è che A' è Sigma_1(A), ovvero A' è ricorsivamente enumerabile relativizzato ad A. Questo significa che esiste una macchina con oracolo A che enumera gli elementi di A' senza necessariamente decidere l'appartenenza. Viceversa, ogni insieme Sigma_1(A) è riducibile ad A', mostrando che A' è Sigma_1(A)-completo. Questa caratterizzazione collega il salto alla gerarchia aritmetica relativizzata.

Il Teorema del Salto di Post

Uno dei risultati più importanti e sorprendenti nella teoria del salto è il teorema del salto di Post, che caratterizza completamente quali gradi possono essere realizzati come salti. Il teorema afferma che un grado a è il salto di qualche grado se e solo se a minore o uguale a'. In altre parole, i gradi che sono salti sono esattamente quelli che ammettono una "auto-riducibilità" tramite il proprio salto.

Questa caratterizzazione è tutt'altro che ovvia. La direzione facile è che se a = b' per qualche b, allora a minore o uguale a' poiché b' minore o uguale (b')' = (a)'. La direzione difficile richiede una costruzione ingegnosa: dato un grado a tale che a minore o uguale a', dobbiamo costruire un grado b tale che b' = a. La costruzione utilizza il metodo delle priorità e proprietà di definibilità sottili della struttura dei gradi.

Il teorema del salto ha conseguenze importanti. Implica che non tutti i gradi sono salti: un grado a tale che a non è minore o uguale a' non può essere il salto di alcun grado. Tali gradi esistono e sono chiamati gradi low: i gradi a tali che a' = zero'. I gradi low rappresentano insiemi di complessità computazionale minima nel senso che, sebbene non siano ricorsivi, il loro salto non è più complesso del salto dell'insieme vuoto.

Gerarchia dei Salti Iterati

Possiamo iterare l'operazione di salto per costruire una gerarchia infinita. Definiamo A^(0) = A, A^(n+1) = (A^(n))', ovvero A^(n+1) è il salto di A^(n). Questa iterazione produce una catena strettamente crescente: A minore_T A' minore_T A'' minore_T A''' minore_T ... dove ogni elemento è strettamente più complesso del precedente rispetto alla riducibilità di Turing.

La gerarchia dei salti iterati corrisponde esattamente alla gerarchia aritmetica quando partiamo dall'insieme vuoto. Abbiamo zero^(n) = insieme vuoto^(n), il salto n-esimo dell'insieme vuoto, che è un insieme Sigma_n-completo. Più precisamente, insieme vuoto' è Sigma_1-completo (è il problema della fermata), insieme vuoto'' è Sigma_2-completo, e in generale insieme vuoto^(n) è Sigma_n-completo. Questo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i livelli della gerarchia aritmetica e i salti iterati del grado zero.

Un insieme A è aritmetico se e solo se A è Turing riducibile a insieme vuoto^(n) per qualche n finito. Gli insiemi non aritmetici, quindi, sono precisamente quelli che non sono riducibili a nessun salto finito di insieme vuoto. Questo fornisce una caratterizzazione computazionale della nozione logica di definibilità aritmetica: gli insiemi aritmetici sono quelli la cui complessità computazionale è dominata da un numero finito di iterazioni dell'operazione di salto.

Gradi Low e High

La classificazione dei gradi in termini del loro comportamento rispetto al salto conduce a una tassonomia importante. Un grado a è detto low se a' = zero', ovvero se il suo salto non è più complesso del salto del grado zero. Un grado è high se a' = zero'', ovvero se il suo salto è massimale tra i gradi ricorsivamente enumerabili. Più in generale, definiamo la gerarchia low/high: un grado a è low_n se a^(n) = zero^(n), ed è high_n se a^(n) = zero^(n+1).

I gradi low rappresentano insiemi che, pur essendo non calcolavili, hanno una complessità "quasi ricorsiva" nel senso che il loro salto non introduce nuova complessità oltre a quella già presente in zero'. L'insieme vuoto stesso è low (vacuamente, poiché il suo grado è zero), ma esistono gradi ricorsivamente enumerabili low non banali. Anzi, la classe dei gradi r.e. low è estremamente ricca: contiene una densità iniziale di gradi r.e.

I gradi high, al contrario, rappresentano il massimo di complessità possibile per un grado r.e. relativamente al salto. Se a è high, allora ogni insieme Sigma_2 è riducibile ad a', mostrando che computare con oracolo a conferisce un potere eccezionale. L'esistenza di gradi r.e. high fu dimostrata da Martin utilizzando metodi di forcing, e successivamente costruzioni più dirette sono state fornite mediante il metodo delle priorità.

Il Teorema della Densità del Salto

Un risultato profondo riguardante la struttura dei gradi e il salto è il teorema della densità del salto, dimostrato da Sacks e ampliato da Cooper. Il teorema afferma che se a è un grado ricorsivamente enumerabile e b è un qualsiasi grado tale che a minore b minore a', allora esiste un grado ricorsivamente enumerabile c tale che a minore c minore a' e c' = b. In altre parole, la classe dei salti dei gradi r.e. è densa al di sotto di ogni salto di un grado r.e.

Questo risultato è sorprendente perché mostra che, sebbene non tutti i gradi siano salti, i salti dei gradi r.e. formano una classe molto ricca che riempie densamente certi intervalli. La dimostrazione richiede tecniche avanzate del metodo delle priorità e rappresenta uno dei risultati tecnici più difficili nella teoria dei gradi r.e. Le conseguenze del teorema della densità del salto si estendono a numerose aree della teoria della calcolabilità, influenzando la comprensione della struttura globale dei gradi.

Inversione del Salto e Coni

Il problema dell'inversione del salto chiede, dato un grado a, se esiste sempre un grado b tale che b' = a. Abbiamo già visto che il teorema del salto di Post fornisce una risposta parziale: esiste un tale b se e solo se a minore o uguale a'. Ma possiamo dire di più riguardo alle proprietà di questo b?

Il teorema dell'inversione del salto di Friedberg afferma che se a è un grado ricorsivamente enumerabile maggiore di zero, allora esiste un grado ricorsivamente enumerabile b minore di a tale che b' = a. Questo risultato mostra che ogni grado r.e. non banale può essere realizzato come salto di un grado r.e. strettamente minore. La costruzione è altamente non triviale e utilizza il metodo delle priorità infinite.

Un raffinamento ulteriore riguarda i coni: un cono sopra un grado a è l'insieme di tutti i gradi maggiori o uguali ad a. Il teorema del cono afferma che per ogni grado a esiste un grado b tale che ogni grado nel cono sopra b ha salto nel cono sopra a'. Questo tipo di risultato mostra che certe proprietà dei gradi sono "cofinali", ovvero valgono per tutti i gradi sufficientemente grandi.

Salti e Definibilità

Uno degli aspetti più affascinanti del salto è la sua connessione con la definibilità logica. Come abbiamo menzionato, il salto corrisponde all'aggiunta di un quantificatore esistenziale a una definizione. Più precisamente, se A è definibile da una formula Phi(x) nel linguaggio della seconda aritmetica, allora A' è definibile dalla formula "esiste Y [Y è il grafo di una computazione convergente con oracolo A su input x]".

Questa interpretazione del salto in termini di quantificatori rivela una profonda connessione tra la teoria dei gradi e la teoria dei modelli. I salti iterati corrispondono a iterazioni di quantificatori, e la gerarchia dei salti riflette la gerarchia delle complessità quantificazionali. Il fatto che ogni insieme aritmetico sia riducibile a un salto finito di insieme vuoto corrisponde al fatto che ogni insieme definibile da una formula della prima aritmetica è definibile con un numero finito di quantificatori.

Inoltre, il salto è l'operazione naturale che preserva la struttura della gerarchia aritmetica sotto relativizzazione. Se A è Delta_n, allora la gerarchia aritmetica relativizzata ad A ha A' come insieme Sigma_1(A)-completo, A'' come insieme Sigma_2(A)-completo, e così via. Questo mostra che il salto è lo strumento canonico per "salire di livello" nella gerarchia della complessità definizionale.

Applicazioni del Salto alla Teoria dei Modelli

Il salto trova applicazioni anche nella teoria dei modelli, in particolare nello studio dei gradi di spettro. Lo spettro di una teoria del primo ordine è l'insieme dei gradi delle presentazioni ricorsive dei suoi modelli. Il salto permette di caratterizzare quali gradi possono apparire negli spettri di teorie specifiche.

Per esempio, Slaman ha dimostrato che i gradi nello spettro di una teoria ricorsivamente assiomatizzabile sono esattamente i gradi che computano un modello della teoria. Utilizzando il salto, ha poi mostrato che per ogni n esiste una teoria il cui spettro consiste esattamente dei gradi maggiori o uguali a zero^(n). Questi risultati dimostrano che il salto è uno strumento fondamentale per comprendere la complessità computazionale dei modelli di teorie logiche.

Ipersalti e la Gerarchia Iperartimetica

Oltre i Salti Finiti: Motivazione per l'Ipersalto

L'iterazione finita dell'operazione di salto produce la gerarchia aritmetica, esaurendo tutti gli insiemi definibili nella prima aritmetica. Ma la matematica non si ferma qui: esistono insiemi

che non sono definibili con un numero finito di quantificatori ma richiedono risorse espressive più potenti. Per studiarli, dobbiamo estendere l'operazione di salto oltre l'ordinale finito omega, considerando iterazioni transfinite.

Il salto omega-esimo, o ipersalto, è una generalizzazione dell'operazione di salto che permette di "saltare attraverso" l'intera gerarchia aritmetica in un unico passo. Per definirlo, dobbiamo prima introdurre il concetto di notazione ordinale e di sistema di notazioni ordinali. Una notazione ordinale è un modo di rappresentare ordinali mediante numeri naturali, e un sistema di notazioni ordinali è un insieme ricorsivo di tali notazioni con relazioni ricorsive che riflettono l'ordinamento e le operazioni sugli ordinali.

Il sistema di notazioni ordinali più importante è quello di Kleene, denotato O. Questo sistema codifica gli ordinali ricorsivi, ovvero quegli ordinali che possono essere rappresentati come tipi d'ordine di buoni ordinamenti ricorsivi sui numeri naturali. Il sistema O ha una struttura complessa: include notazioni per zero, per i successori, e per i limiti ottenuti come supremi di successioni ricorsive. Non tutti i numeri naturali sono in O, e decidere se un numero è una notazione ordinale è un problema di alta complessità: O è un insieme Pi_1^1-completo, dove Pi_1^1 denota il primo livello della gerarchia analitica.

Definizione dell'Ipersalto

Dato un insieme A e una notazione ordinale a in O, definiamo l'ipersalto di A relativo ad a, denotato A^(a), per induzione sulla struttura delle notazioni ordinali. Se a è la notazione per zero, definiamo A^(a) = A. Se a è la notazione per il successore di b, definiamo A^(a) = (A^(b))', ovvero il salto di A^(b). Se a è una notazione per un ordinale limite, diciamo supremo della successione indicizzata da e, definiamo A^(a) come l'unione di tutti gli A^(b) dove b varia nelle notazioni che compaiono nella successione indicizzata da e.

Questa definizione richiede alcune precisazioni tecniche. In primo luogo, dipende dal sistema di notazioni ordinali scelto. Sistemi diversi possono portare a definizioni leggermente diverse dell'ipersalto, sebbene tutte siano Turing equivalenti per ordinali sufficientemente piccoli. In secondo luogo, la definizione per i limiti richiede una codifica della successione fondamentale, e questa codifica deve essere scelta con cura per garantire che l'ipersalto sia ben definito.

L'ipersalto più importante è H_A = A^(omega_1^CK), dove omega_1^CK è la notazione per l'ordinale di Church-Kleene, il più piccolo ordinale non ricorsivo. Questo ordinale gioca un ruolo centrale nella teoria della calcolabilità superiore e nella logica infinitaria. L'insieme H_A è chiamato semplicemente l'ipersalto di A e rappresenta il limite di tutti i salti iterati finitamente o transfitamente fino al primo ordinale non ricorsivo.

Proprietà Fondamentali dell'Ipersalto

L'ipersalto condivide molte proprietà con il salto ordinario ma è computazionalmente molto più potente. Prima di tutto, è monotono: se A è Turing riducibile a B, allora H_A è Turing riducibile a H_B. Questo permette di definire l'ipersalto come operazione sui gradi di Turing: dato un grado a, l'ipergrado h(a) è il grado di H_A per qualsiasi A in a.

In secondo luogo, l'ipersalto è strettamente crescente: A è strettamente Turing riducibile a H_A per ogni A. Infatti, tutti gli iterati finiti di A sono riducibili a H_A, poiché H_A domina l'intera gerarchia dei salti finiti. Ma H_A non è riducibile ad alcun salto finito di A: se lo fosse, contraddiremmo il fatto che H_A contiene informazioni su tutti i livelli della gerarchia aritmetica relativizzata ad A.

Una proprietà cruciale è che H_A è Delta_1^1(A), ovvero è definibile da una formula aritmetica del second'ordine con un unico quantificatore insiemistico relativizzato ad A. Più precisamente, H_A è l'insieme dei numeri e tali che esiste un insieme X che codifica una computazione infinitaria convergente con oracolo A. Questa caratterizzazione mostra che l'ipersalto corrisponde all'aggiunta di un quantificatore del second'ordine, così come il salto ordinario corrisponde all'aggiunta di un quantificatore del primo ordine.

La Gerarchia Iperartimetica

Così come i salti finiti generano la gerarchia aritmetica, gli ipersalti iterati generano la gerarchia iperartimetica. Definiamo per induzione sugli ordinali ricorsivi una sequenza di insiemi: HYP_0(A) = A, HYP_{alpha+1}(A) = salto di HYP_alpha(A), e HYP_lambda(A) = unione di HYP_beta(A) per beta minore di lambda quando lambda è limite. La gerarchia iperartimetica consiste degli insiemi HYP_alpha(insieme vuoto) per alpha minore di omega_1^CK.

Un insieme X è iperartimetico se appartiene a HYP_alpha(insieme vuoto) per qualche ordinale ricorsivo alpha. Equivalentemente, X è iperartimetico se è definibile da una formula Delta_1^1, ovvero da una formula aritmetica del second'ordine con un quantificatore insiemistico che è sia esistenziale che universale. Questa caratterizzazione collega la gerarchia iperartimetica alla gerarchia analitica, che classifica gli insiemi in base al numero di quantificatori insiemistici necessari per definirli.

La gerarchia iperartimetica ha una struttura ricca analoga a quella della gerarchia aritmetica. Ogni livello HYP_alpha è strettamente contenuto in HYP_{alpha+1}, e esistono insiemi HYP_{alpha+1}-completi che non appartengono a HYP_alpha. Tuttavia, a differenza della gerarchia aritmetica che è indicizzata dagli ordinali finiti, la gerarchia iperartimetica si estende fino all'ordinale di Church-Kleene, un ordinale transfinito di grandezza considerevole.

Il Teorema di Spector-Gandy

Uno dei risultati più importanti nella teoria dell'ipersalto è il teorema di Spector-Gandy, che fornisce una caratterizzazione enumerativa degli insiemi Sigma_1^1. Ricordiamo che un insieme A è Sigma_1^1 se è definibile da una formula della forma "esiste X Phi(x, X)" dove Phi è aritmetica. Il teorema di Spector-Gandy afferma che A è Sigma_1^1 se e solo se A è ricorsivamente enumerabile in H_insieme vuoto, ovvero se e solo se A è Sigma_1(H_insieme vuoto).

Questo risultato è l'analogo del teorema che caratterizza gli insiemi Sigma_1 come ricorsivamente enumerabili, ma spostato di un livello nella gerarchia logica. Mostra che l'ipersalto gioca per la gerarchia analitica lo stesso ruolo che il salto gioca per la gerarchia

aritmetica: è l'operazione canonica che corrisponde all'aggiunta di un quantificatore. Il teorema di Spector-Gandy ha conseguenze profonde per la teoria della definibilità e per la comprensione della complessità degli insiemi analitici.

Gradi Iperartimetici

Così come i gradi di Turing misurano la complessità computazionale relativa per gli insiemi aritmetici e oltre, i gradi iperartimetici misurano la complessità per gli insiemi nella gerarchia analitica. Due insiemi A e B sono iperartimeticamente equivalenti se ciascuno è definibile da una formula Delta_1^1 relativizzata all'altro. I gradi iperartimetici formano una struttura ordinata analogamente ai gradi di Turing.

La struttura dei gradi iperartimetici è in alcuni aspetti più semplice di quella dei gradi di Turing. Per esempio, non esistono gradi iperartimetici minimi diversi da zero, mentre esistono gradi di Turing minimi. Questo perché la definibilità Delta_1^1 è molto più potente della calcolabilità di Turing e permette di "saltare attraverso" qualsiasi grado minimo.

D'altra parte, la struttura dei gradi iperartimetici è ancora molto complessa. Sacks ha dimostrato che è densa, e Spector ha mostrato che esistono gradi iperartimetici incomparabili. La teoria dei gradi iperartimetici è un'area di ricerca attiva che generalizza molti risultati della teoria dei gradi di Turing a un contesto di maggiore complessità logica.

Iterazioni Ulteriori: Oltre l'Ordinale di Church-Kleene

L'ipersalto non è la fine della storia. Possiamo continuare a iterare l'operazione di salto oltre l'ordinale di Church-Kleene, definendo salti per ordinali sempre più grandi. Per fare questo, però, dobbiamo estendere il sistema di notazioni ordinali oltre O, considerando ordinali non ricorsivi.

Un approccio utilizza i sistemi di notazioni ordinali generalizzati, come il sistema di Kleene-Brouwer che estende O per includere notazioni per ordinali fino a omega_1, il primo ordinale non numerabile. Tuttavia, a questo livello la teoria diventa molto più complessa, e molte delle proprietà piacevoli del salto e dell'ipersalto si perdono. In particolare, la monotonia può fallire, e la relazione tra salti e definibilità diventa più sottile.

Un altro approccio utilizza la teoria descrittiva degli insiemi e considera la gerarchia proiettiva, che estende la gerarchia analitica permettendo alternanze arbitrarie di quantificatori insiemistici. Ogni livello della gerarchia proiettiva corrisponde a un certo "super-ipersalto" che salta attraverso tutti i livelli precedenti. Tuttavia, a differenza della gerarchia aritmetica e iperartimetica, la gerarchia proiettiva presenta fenomeni di indipendenza: alcune questioni sulla struttura della gerarchia non possono essere risolte negli assiomi standard della teoria degli insiemi.

Applicazioni dell'Ipersalto

L'ipersalto trova applicazioni in diverse aree della logica matematica. In teoria della dimostrazione, l'ipersalto è collegato alla forza dimostrativa di sistemi formali. Gli insiemi iperartimetici sono esattamente quelli provabilmente ricorsivi nell'aritmetica del

second'ordine con uno schema di comprensione predicativo. Questo collega la teoria della calcolabilità alla teoria della dimostrazione e alla filosofia della matematica.

In teoria dei modelli, l'ipersalto caratterizza la complessità degli spettri di strutture ricorsive. Ash e Knight hanno sviluppato una teoria elaborata che utilizza l'ipersalto e le sue iterazioni per classificare la complessità dei problemi di isomorfismo per strutture ricorsive. Questa teoria ha applicazioni allo studio di strutture algebriche, grafi, e altre strutture matematiche dal punto di vista computazionale.

In teoria della complessità descrittiva, l'ipersalto fornisce un ponte tra complessità computazionale e complessità definizionale. I teoremi che collegano classi di complessità come P, NP, e PSPACE a frammenti della logica del second'ordine possono essere visti come analoghi finiti dei risultati che collegano l'ipersalto alla gerarchia analitica. Questa prospettiva ha stimolato ricerche in entrambe le direzioni, arricchendo sia la teoria della complessità che la teoria della calcolabilità.

L'Ipersalto e la Computazione Infinitaria

Un modo alternativo di comprendere l'ipersalto è attraverso il concetto di computazione infinitaria. Mentre una macchina di Turing ordinaria opera per un numero finito di passi, possiamo immaginare macchine che operano per un numero transfinito di passi, con comportamenti specifici ai limiti. L'ipersalto può essere caratterizzato come l'insieme delle computazioni infinitarie convergenti con oracolo A.

Questa prospettiva è stata sviluppata in dettaglio da Kleene nella sua teoria delle computazioni ordinali. Una computazione ordinale è una sequenza transfinita di configurazioni di una macchina di Turing, indicizzata da un ordinale, che soddisfa certe condizioni di coerenza ai limiti. L'ipersalto corrisponde all'insieme degli indici di computazioni ordinali che convergono prima dell'ordinale di Church-Kleene.

La computazione infinitaria fornisce un'interpretazione operazionale dell'ipersalto che generalizza l'interpretazione operazionale del salto in termini di macchine di Turing. Questa interpretazione è particolarmente utile per comprendere le proprietà dell'ipersalto e per sviluppare intuizioni sui gradi iperartimetici. Ha anche applicazioni alla teoria dei processi infiniti e alla semantica dei linguaggi di programmazione con costrutti di ricorsione transfinita.

Definibilità nella Seconda Aritmetica

Il Linguaggio della Seconda Aritmetica

La seconda aritmetica è un sistema formale che estende la prima aritmetica di Peano permettendo la quantificazione non solo sui numeri naturali ma anche su insiemi di numeri naturali. Il linguaggio della seconda aritmetica, denotato L_2, include due tipi di variabili: variabili individuali che variano su N e variabili del secondo tipo (o variabili insiemistiche) che variano su sottoinsiemi di N. Il linguaggio include i simboli aritmetici standard (addizione, moltiplicazione, zero, uno) e il simbolo di appartenenza che permette di esprimere che un numero appartiene a un insieme.

Le formule di L_2 sono costruite dai predicati atomici mediante connettivi booleani e quantificatori su entrambi i tipi di variabili. Una formula è aritmetica se tutti i suoi quantificatori sono su variabili individuali, anche se può contenere variabili insiemistiche libere. Una formula è analitica se contiene almeno un quantificatore su variabili insiemistiche. La distinzione tra formule aritmetiche e analitiche è fondamentale per comprendere la stratificazione della complessità definizionale nella seconda aritmetica.

Il modello standard della seconda aritmetica è la struttura (N, P(N), +, *, 0, 1, appartenenza) dove N è l'insieme dei numeri naturali con le operazioni aritmetiche standard e P(N) è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N. In questo modello, ogni formula definisce un insieme di tuple di numeri naturali e insiemi. Tuttavia, possiamo anche considerare modelli non standard, dove il dominio del secondo tipo non è tutto P(N) ma solo una sottoclasse appropriata.

La Gerarchia Analitica

Analogamente alla gerarchia aritmetica per le formule del primo ordine, possiamo definire una gerarchia analitica per le formule del secondo ordine basata sul numero di quantificatori insiemistici. Una formula è Sigma_n^1 se ha la forma "esiste X_1 per ogni X_2 esiste X_3 ... Q_n X_n Phi" dove Phi è aritmetica e i quantificatori alternano tra esistenziale e universale. Una formula è Pi_n^1 se ha la forma duale con i quantificatori scambiati. Una formula è Delta_n^1 se è equivalente sia a una formula Sigma_n^1 che a una formula Pi_n^1.

La gerarchia analitica generalizza la gerarchia aritmetica a un livello superiore di complessità. Gli insiemi Sigma_1^1 sono quelli definibili da formule con un singolo quantificatore esistenziale su insiemi seguito da una parte aritmetica. Abbiamo già incontrato questa classe quando abbiamo discusso il teorema di Spector-Gandy: gli insiemi Sigma_1^1 coincidono con gli insiemi ricorsivamente enumerabili nell'ipersalto dell'insieme vuoto.

Gli insiemi Pi_1^1 sono i complementi degli insiemi Sigma_1^1 e sono chiamati co-analitici. Questi insiemi godono di proprietà di regolarità notevoli: per esempio, ogni insieme Pi_1^1 di numeri reali è Lebesgue misurabile e gode della proprietà di Baire. Questi risultati, parte della teoria descrittiva classica degli insiemi, mostrano che la definibilità analitica conferisce struttura geometrica agli insiemi.

Sottosistemi della Seconda Aritmetica

La seconda aritmetica completa, denotata Z_2, include lo schema di comprensione illimitato: per ogni formula Phi(x, X_1, ..., X_n) del linguaggio, esiste un insieme Y tale che per ogni x si ha x in Y se e solo se Phi(x, X_1, ..., X_n). Questo schema assiomatico è estremamente potente e permette di dimostrare virtualmente tutta la matematica classica. Tuttavia, molti teoremi matematici richiedono solo frammenti più deboli della seconda aritmetica.

Il sottosistema più importante per la teoria della calcolabilità è ACA_0 (Arithmetical Comprehension Axiom), che include solo lo schema di comprensione per formule aritmetiche. ACA_0 asserisce che per ogni formula aritmetica Phi(x, X_1, ..., X_n) esiste un insieme Y definito da quella formula. Questo sistema è sufficiente per sviluppare gran parte

della teoria della calcolabilità classica, inclusa la teoria dei gradi di Turing e la maggior parte dei risultati sulla gerarchia aritmetica.

Un sistema ancora più debole è RCA_0 (Recursive Comprehension Axiom), che include solo lo schema di comprensione per formule Delta_0^1, ovvero formule aritmetiche senza quantificatori illimitati su numeri. RCA_0 è il sistema base della matematica inversa e corrisponde approssimativamente alla matematica costruttiva. Molti teoremi classici di analisi e topologia possono essere dimostrati in RCA_0, mostrando che non richiedono principi di esistenza non costruttivi.

Tra RCA_0 e ACA_0 si situa WKL_0 (Weak König's Lemma), che aggiunge a RCA_0 il principio che ogni albero binario infinito ha un ramo infinito. WKL_0 è sufficiente per dimostrare teoremi come il teorema di Heine-Borel, il teorema dell'estremo superiore, e molti risultati di algebra astratta. È strettamente più debole di ACA_0 ma più forte di RCA_0, creando una stratificazione fine della forza logica necessaria per vari teoremi matematici.

Definibilità dei Gradi di Turing

Una questione fondamentale riguarda quali proprietà dei gradi di Turing sono definibili nella seconda aritmetica. Abbiamo già menzionato che Shore e Slaman hanno dimostrato la definibilità dell'operazione di salto nella struttura dei gradi r.e. Questo risultato ha conseguenze profonde: implica che l'intera gerarchia aritmetica è definibile in termini puramente ordinali, senza riferimento esplicito a formule logiche.

La dimostrazione del teorema di Shore-Slaman è estremamente complessa e utilizza tecniche avanzate dalla teoria dei gradi, incluse costruzioni con priorità infinite e argomenti di definibilità locale. Il risultato afferma che esiste una formula del primo ordine nel linguaggio degli ordinamenti parziali che definisce la relazione "b = a'" nella struttura dei gradi r.e. Questo significa che la relazione di salto è invariante sotto tutti gli automorphismi della struttura, il che a sua volta implica che è l'unico automorphismo.

Generalizzazioni di questo risultato si estendono oltre i gradi r.e. Slaman e Woodin hanno dimostrato che anche nella struttura di tutti i gradi di Turing, l'operazione di salto è definibile, sebbene la dimostrazione richieda tecniche ancora più sofisticate. Questi risultati mostrano che la struttura ordinale dei gradi codifica completamente la loro struttura computazionale, una coincidenza straordinaria che rivela connessioni profonde tra ordinamento e calcolabilità.

Il Teorema di Post sulla Gerarchia Aritmetica e i Gradi

Il teorema di Post fornisce una caratterizzazione completa dei gradi ricorsivamente enumerabili in termini della gerarchia aritmetica. Il teorema afferma che ogni grado r.e. non nullo contiene un insieme Sigma_1-completo. Questo significa che i gradi r.e. possono essere identificati con i gradi degli insiemi completi per i vari livelli della gerarchia Sigma_1.

Più precisamente, se a è un grado r.e. maggiore di zero, allora esiste un insieme A in a tale che ogni insieme Sigma_1 è riducibile ad A mediante una riduzione calcolabile. Viceversa, se A è Sigma_1-completo, allora il grado di A è r.e. Questo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i gradi r.e. non nulli e i gradi di completezza per Sigma_1.

Il teorema di Post si estende a tutti i livelli della gerarchia aritmetica. Per ogni n, i gradi che contengono insiemi Sigma_n-completi coincidono con i gradi dell'n-esimo salto dei gradi r.e. In altre parole, un insieme è Sigma_n-completo se e solo se è Turing equivalente a B^(n-1)' per qualche insieme r.e. B. Questa caratterizzazione unifica la gerarchia aritmetica e la gerarchia dei gradi, mostrando che sono due facce dello stesso fenomeno.

Insiemi Aritmetici in Modelli Non Standard

Quando consideriamo modelli non standard della seconda aritmetica, la nozione di definibilità acquisisce sfumature sottili. Un insieme è aritmetico nel senso standard se è definibile da una formula della prima aritmetica nel modello standard. Ma in un modello non standard, la stessa formula può definire un insieme diverso, e insiemi che sono aritmetici nel modello standard possono non esserlo nel modello non standard.

Un risultato importante è che gli insiemi definibili in un modello di ACA_0 sono esattamente gli insiemi aritmetici nel senso del modello. Questo significa che ACA_0 "cattura" la nozione di definibilità aritmetica in modo robusto: indipendentemente dal modello scelto, gli insiemi definibili sono quelli aritmetici relativi a quel modello. Questa proprietà rende ACA_0 un sistema naturale per lo studio della calcolabilità e della definibilità.

In modelli di RCA_0, invece, gli insiemi definibili possono essere strettamente meno degli insiemi aritmetici. Esistono modelli di RCA_0 in cui non tutti gli insiemi Delta_1 sono definibili. Questo riflette il fatto che RCA_0 è un sistema costruttivo che non asserisce l'esistenza di tutti gli insiemi aritmetici ma solo di quelli che possono essere effettivamente costruiti mediante procedure ricorsive.

Codifica della Gerarchia Aritmetica

Un aspetto tecnico ma importante riguarda come la gerarchia aritmetica può essere codificata all'interno della seconda aritmetica. Vogliamo un modo uniforme di parlare di tutti i livelli della gerarchia simultaneamente. Questo è possibile mediante la codifica di formule: possiamo assegnare a ogni formula aritmetica un codice di Gödel, un numero naturale che rappresenta sintatticamente la formula.

Dato un codice e, possiamo definire all'interno della seconda aritmetica l'insieme degli x tali che la formula con codice e, valutata su x, è vera. Tuttavia, questo richiede una nozione di verità aritmetica, che non è definibile nella prima aritmetica per il teorema di Tarski. Nella seconda aritmetica, possiamo definire la verità per formule Sigma_n per ogni n fisso, ma non possiamo definire la verità per tutte le formule aritmetiche simultaneamente.

Questa limitazione riflette il fatto che l'insieme delle verità aritmetiche non è aritmetico, come abbiamo già menzionato. Tuttavia, in ACA_0 possiamo dimostrare l'esistenza di una gerarchia di insiemi di verità: per ogni n esiste un insieme T_n che codifica le verità delle formule Sigma_n. Questa gerarchia di insiemi di verità è strettamente crescente e fornisce una rappresentazione interna della gerarchia aritmetica all'interno del sistema formale.

Matematica Inversa e Equivalenze Logiche

Il programma della matematica inversa, sviluppato principalmente da Friedman e Simpson, studia quali assiomi della seconda aritmetica sono necessari e sufficienti per dimostrare teoremi specifici della matematica classica. Uno dei risultati centrali è che molti teoremi naturali sono equivalenti a uno dei cinque sottosistemi principali: RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0 (Arithmetical Transfinite Recursion), e Pi_1^1-CA_0 (Pi_1^1 Comprehension).

Per esempio, il teorema che ogni campo ordinato completo è isomorfo ai reali è equivalente su RCA_0 ad ACA_0. Il teorema di Bolzano-Weierstrass è equivalente a WKL_0. Il teorema di Ramsey infinito per coppie è equivalente ad ACA_0. Queste equivalenze mostrano che certi teoremi matematici incorporano implicitamente principi di esistenza di insiemi di livelli specifici nella gerarchia analitica.

La matematica inversa ha rivelato che la gerarchia dei sottosistemi della seconda aritmetica corrisponde a una gerarchia naturale di complessità matematica. I teoremi provabili in RCA_0 sono quelli che hanno contenuto costruttivo essenziale. I teoremi equivalenti a WKL_0 coinvolgono compattezza e completezza finita. I teoremi equivalenti ad ACA_0 richiedono esistenza di insiemi aritmetici arbitrari. I teoremi equivalenti ad ATR_0 richiedono iterazioni transfinite di processi ricorsivi. Questa classificazione illumina la struttura logica della matematica stessa.

Definibilità e Complessità Algoritmica

La definibilità nella seconda aritmetica è intimamente connessa alla complessità algoritmica. Un insieme definibile da una formula Sigma_n^1 ha una certa complessità computazionale che può essere caratterizzata in termini di oracoli e salti iterati. Viceversa, insiemi di data complessità computazionale sono definibili da formule di complessità logica corrispondente.

Questa corrispondenza bidirezionale tra definibilità logica e complessità computazionale è uno dei temi unificanti della teoria della calcolabilità superiore. Permette di tradurre questioni sulla calcolabilità in questioni sulla logica e viceversa. Per esempio, il problema se un dato insieme è Sigma_n-completo può essere formulato come il problema se è definibile da certe formule e non da altre.

Un'applicazione importante riguarda la complessità dei problemi di decisione. Il problema se una formula Sigma_n^1 è soddisfacibile ha complessità strettamente maggiore del problema se una formula Sigma_{n-1}^1 lo è. Questo fornisce una gerarchia infinita di complessità per problemi logici, parallela alla gerarchia della calcolabilità. La struttura di questa gerarchia è oggetto di studio intensivo nella logica computazionale.

Connessioni Profonde e Risultati Avanzati

La Relazione tra Salti e Quantificatori

Una delle intuizioni più profonde nella teoria della calcolabilità e della definibilità è che il salto corrisponde esattamente all'aggiunta di un quantificatore esistenziale a una definizione. Questa corrispondenza non è superficiale ma riflette una connessione strutturale fondamentale tra la complessità computazionale e la complessità logica. Esaminiamo questa relazione in dettaglio per comprenderne tutte le ramificazioni.

Consideriamo un insieme A che appartiene alla classe Sigma_n della gerarchia aritmetica. Per definizione, A è rappresentabile da una formula della forma "esiste y_1 per ogni y_2 ... Q_n y_n Psi(x, y_1, ..., y_n)" dove Psi è Delta_0. Il salto di A, cioè A', è l'insieme dei programmi che con oracolo A si fermano sul proprio indice. Possiamo esprimere l'appartenenza a A' come "esiste z [z codifica una computazione convergente con oracolo A sul programma e]". Questa affermazione richiede un quantificatore esistenziale aggiuntivo che varia su possibili computazioni, e la verifica che z codifica effettivamente una computazione valida richiede consultazioni all'oracolo A.

Quando espandiamo la definizione di "computazione convergente con oracolo A", otteniamo una formula che combina il quantificatore esistenziale esterno con la definizione Sigma_n di A. Il risultato netto è una formula Sigma_{n+1}: il quantificatore esistenziale che cerca la computazione convergente diventa il quantificatore più esterno, seguito dai quantificatori che definiscono A. Questa costruzione mostra rigorosamente che il salto incrementa di uno il livello nella gerarchia aritmetica.

La corrispondenza funziona anche in senso inverso. Se B è un insieme Sigma_{n+1}, possiamo scrivere B come {x : esiste y Phi(x, y)} dove Phi è Pi_n. Ma allora B è ricorsivamente enumerabile relativizzato a qualsiasi insieme Pi_n-completo C: possiamo enumerare B cercando testimoni y tali che Phi(x, y), e verificare Phi(x, y) consultando l'oracolo C. Se scegliamo C come il salto (n-1)-esimo di insieme vuoto, otteniamo che B è r.e. in C, ovvero B è Turing riducibile a C'. Questo mostra che ogni insieme Sigma_{n+1} è riducibile al salto n-esimo di insieme vuoto.

Teoremi di Limitazione e Non-Definibilità

Così come il teorema di incompletezza di Gödel mostra che esistono verità aritmetiche non dimostrabili in sistemi formali ricorsivamente assiomatizzabili, esistono teoremi di limitazione che mostrano l'impossibilità di definire certi insiemi con risorse logiche limitate. Il teorema della gerarchia per la gerarchia aritmetica è un esempio: garantisce che esistono insiemi Sigma_{n+1} che non sono definibili da formule Pi_n, mostrando che la complessità quantificazionale è una misura genuina di difficoltà definizionale.

Un risultato più sottile riguarda la definibilità all'interno di modelli specifici. In un modello di RCA_0, non tutti gli insiemi che sono aritmetici nel senso standard sono necessariamente definibili. Esistono modelli omega-non-standard di RCA_0 in cui certi insiemi ricorsivi non hanno nomi. Questo fenomeno riflette il fatto che la definibilità è una nozione più forte della semplice esistenza: un insieme può esistere nel modello senza che esista una formula che lo isoli univocamente.

Nel contesto dei gradi di Turing, abbiamo teoremi di limitazione che mostrano l'impossibilità di certe costruzioni uniformi. Per esempio, non esiste una procedura uniforme che, dato un grado a, produce un grado b incomparabile con a. Se esistesse una tale procedura, potremmo usarla per costruire una anti-catena non numerabile di gradi, contraddicendo il fatto che i gradi formano un insieme di cardinalità al più quella del continuo. Questi teoremi di limitazione delimitano ciò che è possibile costruire in modo effettivo.

Forcing e Costruzioni Non-Effettive

Il metodo del forcing, originariamente introdotto da Cohen per dimostrare l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, ha trovato applicazioni sorprendenti nella teoria dei gradi di Turing. Jockusch e Soare hanno sviluppato una variante del forcing specificamente adattata alla teoria della calcolabilità, chiamata forcing aritmetico o forcing di Cohen finito. Questo metodo permette di costruire insiemi con proprietà complesse che non sono accessibili mediante il metodo delle priorità.

Un esempio paradigmatico è la costruzione di gradi high. Ricordiamo che un grado a è high se a' = zero'', ovvero se il suo salto è massimale tra i gradi r.e. Martin ha utilizzato il forcing per dimostrare che esistono gradi r.e. high, e successivamente il metodo delle priorità è stato adattato per fornire costruzioni dirette. Tuttavia, per certe proprietà più sottili, il forcing rimane l'unico metodo noto.

Il forcing permette anche di dimostrare risultati di preservazione: se una certa proprietà vale in un modello generico, vale in tutti i modelli generici. Per esempio, Jockusch ha usato il forcing per dimostrare che in ogni modello omega-standard di RCA_0 esistono insiemi con proprietà specifiche di minimalità. Questi risultati mostrano che certe strutture sono inevitabili indipendentemente dal modello scelto.

Gradi di Turing e Strutture Algebriche

La teoria dei gradi di Turing ha connessioni profonde con lo studio delle strutture algebriche dal punto di vista computazionale. Dato un gruppo, un campo, o un'altra struttura algebrica presentata in modo ricorsivo, possiamo chiedere quale sia il grado di Turing del problema di decidere se due elementi sono uguali, o del problema di determinare se un'equazione ha soluzioni. Questi problemi danno origine a una gerarchia di complessità che riflette la complessità intrinseca della struttura.

Per esempio, Rabin ha dimostrato che la teoria del primo ordine dell'aritmetica di Presburger (aritmetica con solo addizione) è decidibile, ma la teoria del primo ordine dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero non lo è. Utilizzando tecniche della teoria dei gradi, possiamo raffinare questi risultati determinando esattamente quale grado di Turing è necessario per decidere le teorie in questione. In molti casi, il grado è zero^(n) per qualche n specifico, collegando la complessità della teoria alla gerarchia aritmetica.

Le strutture di Scott sono un altro esempio illuminante. Una struttura di Scott per un insieme A è una famiglia di insiemi che codifica tutte le informazioni computazionali relative ad A in una forma particolarmente maneggevole. Knight e altri hanno sviluppato una teoria elaborata che utilizza gradi di Turing e salti per classificare le strutture di Scott e per determinare quando due strutture sono isomorfe da un punto di vista computazionale.

Randomness e Gradi di Turing

La teoria algoritmica della randomness studia quali sequenze infinite di bit sono "veramente casuali" dal punto di vista della teoria della calcolabilità. Martin-Löf ha introdotto una definizione di randomness basata su test di nullità effettivi: una sequenza è random se passa tutti i test Sigma_1 di misura nulla. Sorprendentemente, questa definizione puramente computazionale coincide con nozioni probabilistiche di randomness.

I gradi di Turing delle sequenze random hanno proprietà speciali. Nessuna sequenza random può avere grado ricorsivo, per definizione. Inoltre, Kučera ha dimostrato che ogni grado r.e. contiene una sequenza random: dato un insieme ricorsivamente enumerabile non ricorsivo, esiste una sequenza random Turing equivalente ad esso. Questo risultato mostra che randomness e enumerabilità ricorsiva non sono incompatibili.

La nozione di randomness può essere relativizzata a un oracolo: una sequenza è random rispetto ad A se passa tutti i test Sigma_1(A) di misura nulla. Questo conduce a una gerarchia di nozioni di randomness parallela alla gerarchia aritmetica. Una sequenza è 2-random se è random rispetto a qualsiasi sequenza 1-random, è 3-random se è random rispetto a qualsiasi sequenza 2-random, e così via. Ogni livello di questa gerarchia corrisponde a un certo livello di complessità di Turing relativa ai salti.

Degrees e Combinatoria Infinita

La teoria di Ramsey infinita studia quali pattern devono necessariamente apparire in colorazioni di strutture infinite. Il teorema di Ramsey per coppie afferma che per ogni colorazione degli insiemi di due elementi dei naturali in un numero finito di colori esiste un insieme infinito omogeneo, ovvero un insieme tutti i cui sottoinsiemi di cardinalità due hanno lo stesso colore. Questo teorema ha una versione effettiva che coinvolge i gradi di Turing.

Jockusch ha dimostrato che per ogni colorazione ricorsiva esiste un insieme omogeneo infinito, ma tale insieme non è necessariamente ricorsivo. Anzi, il problema di trovare un insieme omogeneo per una colorazione ricorsiva ha complessità Sigma_2: esiste sempre un insieme omogeneo di grado al più zero'', ma non necessariamente di grado minore. Questo risultato collega la combinatoria di Ramsey alla gerarchia aritmetica in modo preciso.

Risultati simili valgono per altri teoremi combinatorici. Il teorema di König sugli alberi infiniti, che afferma che ogni albero infinito finitamente ramificato ha un ramo infinito, ha una versione effettiva: ogni albero ricorsivo infinito ha un ramo di grado al più zero'. Il lemma di König debole, che asserisce l'esistenza di rami per alberi binari, corrisponde esattamente al sistema WKL_0 nella matematica inversa, mostrando che è un principio di complessità intermedia.

Omega-Logic e Insiemi Infinitari

L'omega-logica è un'estensione della logica del primo ordine che permette congiunzioni e disgiunzioni infinite numerabili. Una formula omega-logica può avere la forma "per ogni x (Phi_0(x) o Phi_1(x) o Phi_2(x) o ...)" dove la disgiunzione infinita varia su tutte le formule di una famiglia numerabile. Questa estensione drammatica del potere espressivo ha connessioni profonde con la teoria dei gradi.

Un insieme A è definibile in omega-logica se esiste una formula omega-logica Phi(x) tale che A = {n : Phi(n) è vera}. Scott ha dimostrato che un insieme è definibile in omega-logica se e solo se è iperartimetico, ovvero se appartiene alla gerarchia iperartimetica. Questo stabilisce una corrispondenza precisa tra la definibilità in un linguaggio infinitario e la complessità computazionale relativa all'ipersalto.

La omega-logica permette anche di definire nuove operazioni sui gradi. Il grado omega di un insieme A è il grado dell'insieme delle formule omega-logiche vere quando interpretate con A come parametro. Questo grado omega generalizza il salto e ha proprietà interessanti: è sempre maggiore di A ma non necessariamente uguale all'ipersalto di A. La teoria dei gradi omega è un'area di ricerca attiva che generalizza molti risultati classici sui gradi di Turing.

Complessità di Kolmogorov e Gradi

La complessità di Kolmogorov di una stringa è la lunghezza del programma più corto che la genera. Questa nozione di complessità descrittiva ha connessioni inaspettate con la teoria dei gradi. Chaitin ha introdotto la nozione di numero omega, la probabilità che una macchina di Turing universale si fermi su input casuale. Questo numero è algoritmicamente casuale nel senso più forte possibile e ha grado di Turing zero'.

Più in generale, la complessità di Kolmogorov può essere relativizzata a un oracolo, e questo conduce a una gerarchia di nozioni di casualità algoritmica. Solovay e altri hanno studiato i gradi di sequenze infinite che hanno alta complessità di Kolmogorov in senso forte, mostrando che formano una classe definibile nella teoria dei gradi. Questi risultati collegano la teoria dell'informazione algoritmica alla struttura dei gradi di Turing.

Un teorema profondo di Miller afferma che i gradi delle sequenze Martin-Löf random formano una classe definibile nei gradi di Turing. Questo mostra che la randomness, una nozione a priori probabilistica, ha una caratterizzazione puramente ordinale in termini della struttura dei gradi. Tale caratterizzazione utilizza proprietà del salto e della riducibilità in modi sottili, illustrando ancora una volta le connessioni profonde tra concetti apparentemente disparati.

Applicazioni alla Teoria della Dimostrazione

La teoria della dimostrazione studia i sistemi formali e le loro proprietà metamatematiche. I gradi di Turing e la gerarchia aritmetica giocano un ruolo cruciale nell'analisi della forza dimostrativa di sistemi diversi. Un sistema formale è tanto più forte quanto più complessi sono gli insiemi che può provare essere ricorsivi o ricorsivamente enumerabili.

Per esempio, l'aritmetica di Peano del primo ordine PA può dimostrare che un insieme è ricorsivo se e solo se è effettivamente ricorsivo e la sua ricorsività è dimostrabile in PA. Ma esistono insiemi ricorsivi la cui ricorsività non è dimostrabile in PA, come mostrato dal teorema di incompletezza. ACA_0, essendo un sistema del secondo ordine, può dimostrare l'esistenza di tutti gli insiemi aritmetici e quindi è strettamente più forte di PA.

Simpson e altri hanno sviluppato una scala di forza dimostrativa per i sottosistemi della seconda aritmetica basata su quali salti iterati possono provare esistere. RCA_0 può provare l'esistenza di insiemi Delta_1 ma non di tutti gli insiemi Delta_2. WKL_0 può provare l'esistenza di certi insiemi Delta_2 con proprietà speciali. ACA_0 può provare l'esistenza di tutti gli insiemi aritmetici. ATR_0 può provare l'esistenza di iterazioni transfinite fino a omega_1^CK. Questa gerarchia di forza corrisponde esattamente alla gerarchia dei salti e degli ipersalti.

Sviluppi Recenti, Questioni Aperte e Conclusioni

Sviluppi Recenti nella Teoria dei Gradi

La teoria dei gradi di Turing continua a essere un'area di ricerca estremamente attiva, con nuovi risultati che approfondiscono la nostra comprensione della struttura della calcolabilità. Negli ultimi decenni, diversi programmi di ricerca hanno prodotto progressi significativi, rivelando connessioni inaspettate e risolvendo problemi di lunga data.

Uno sviluppo importante riguarda la teoria dei gradi computabilmente enumerabili, una generalizzazione dei gradi ricorsivamente enumerabili che permette enumerazioni con velocità non uniformi. Shore ha dimostrato che molti risultati classici sui gradi r.e. si estendono ai gradi c.e., ma con differenze sottili che illuminano quali proprietà sono veramente essenziali per la struttura. Questo programma ha rivelato che la velocità di enumerazione introduce nuove dimensioni di complessità non catturate dalla semplice riducibilità di Turing.

Un altro filone di ricerca riguarda i cosiddetti gradi d.c.e. (difference of computably enumerable), che sono gradi di insiemi esprimibili come differenza di due insiemi c.e. Questi gradi formano una classe strettamente più grande dei gradi c.e. ma strettamente più piccola di tutti i gradi Delta_2. Cooper, Harrington e altri hanno sviluppato una teoria ricca dei gradi d.c.e., mostrando che hanno proprietà strutturali distinte dai gradi c.e. ma condividono alcune caratteristiche essenziali.

La teoria dei gradi enumeration è un'altra generalizzazione importante. Invece di considerare riduzioni che preservano l'appartenenza, consideriamo riduzioni che preservano l'enumerabilità: A è enumeration riducibile a B se A può essere enumerato da un procedimento che ha accesso a enumerazioni di B e del complemento di B. I gradi enumeration formano una struttura più ricca dei gradi di Turing e sono strettamente connessi alla gerarchia delle classi di complessità nella teoria della complessità computazionale.

Questioni Aperte Fondamentali

Nonostante decenni di ricerca intensiva, numerose questioni fondamentali sulla struttura dei gradi rimangono aperte. Alcune di queste questioni riguardano la definibilità e gli automorphismi, altre riguardano l'embedding di strutture, altre ancora riguardano proprietà combinatorie dei gradi. L'esistenza di questi problemi aperti testimonia la profondità e la ricchezza della teoria.

Una questione di lunga data riguarda l'omogeneità della struttura dei gradi sopra zero': esistono gradi a e b entrambi maggiori di zero' tali che la struttura dei gradi sopra a è isomorfa alla struttura dei gradi sopra b? Slaman e Woodin hanno dimostrato l'omogeneità locale in certi intervalli, ma la questione generale rimane aperta. Una risposta affermativa suggerirebbe che la struttura ha una forma canonica ripetuta a ogni livello, mentre una risposta negativa indicherebbe l'esistenza di caratteristiche strutturali uniche a livelli diversi.

Un altro problema aperto concerne l'esistenza di gradi minimali nella struttura dei gradi d.c.e. Sappiamo che esistono gradi minimali nella struttura di tutti i gradi di Turing, ma non è noto

se esistano gradi d.c.e. minimali. Questo problema ha resistito a numerosi tentativi di risoluzione e sembra richiedere tecniche sostanzialmente nuove. Una soluzione avrebbe implicazioni per la comprensione di come le proprietà strutturali dei gradi dipendano dalla classe considerata.

La questione della decidibilità della teoria elementare di classi specifiche di gradi è un altro problema fondamentale. Sappiamo che la teoria elementare di tutti i gradi è indecidibile, ma cosa possiamo dire dei gradi r.e., dei gradi d.c.e., o dei gradi Delta_2? Nussbaum ha dimostrato che la teoria elementare dei gradi r.e. è indecidibile, ma la complessità esatta rimane un problema aperto. Determinare se questa teoria è aritmeticamente completa o ha complessità analitica avrebbe conseguenze profonde per la comprensione della struttura.

Connessioni con la Teoria della Complessità

La gerarchia aritmetica e i gradi di Turing hanno analogie profonde con le gerarchie studiate nella teoria della complessità computazionale. Le classi P, NP, coNP, e le classi della gerarchia polinomiale possono essere viste come controparti "bounded" delle classi Delta_1, Sigma_1, Pi_1, e dei livelli della gerarchia aritmetica. Questa analogia non è superficiale ma riflette principi strutturali comuni.

Per esempio, il teorema che afferma che Sigma_n è strettamente contenuto in Sigma_{n+1} ha un analogo nella teoria della complessità: se congetturiamo che la gerarchia polinomiale non collassa, allora ogni livello è strettamente contenuto nel successivo. Le tecniche di diagonalizzazione che dimostrano la separazione dei livelli nella gerarchia aritmetica hanno ispirato tentativi di diagonalizzazione nella teoria della complessità, sebbene con successo limitato a causa delle restrizioni sulle risorse.

La complessità descrittiva, sviluppata da Immerman, Vardi, e altri, stabilisce corrispondenze precise tra classi di complessità e frammenti logici. Per esempio, NP coincide con le proprietà esprimibili in logica esistenziale del secondo ordine, e P coincide con le proprietà esprimibili in logica del primo ordine con un punto fisso minimo. Queste corrispondenze sono analoghe alle caratterizzazioni degli insiemi aritmetici mediante formule della prima e seconda aritmetica.

Generalizzazioni alla Calcolabilità Superiore

La teoria della calcolabilità superiore estende le idee della teoria classica a ordinali maggiori e a nozioni di calcolabilità più astratte. Invece di considerare solo funzioni dai numeri naturali ai numeri naturali, consideriamo funzionali che operano su oggetti di tipo superiore, come funzioni da funzioni a numeri, o funzioni da funzioni a funzioni.

La gerarchia aritmetica si generalizza alla gerarchia iperartimetica, come abbiamo visto, e questa a sua volta si generalizza alla gerarchia analitica e oltre. Ma possiamo anche considerare gerarchie relativizzate a nozioni più generali di calcolabilità. La alpha-ricorsione, introdotta da Kreisel, Sacks e altri, estende la nozione di ricorsività ai ordinali ammissibili. Un ordinale alpha è ammissibile se soddisfa certi assiomi della teoria degli insiemi, e la alpha-ricorsione studia le funzioni calcolabili relativamente a questo ordinale.

Le idee di salto e ipersalto si generalizzano naturalmente in questo contesto. Per ogni ordinale ammissibile alpha esiste una nozione di alpha-salto che corrisponde all'aggiunta di un quantificatore nella logica infinitaria appropriata. La teoria degli alpha-gradi di Turing studia la struttura della riducibilità relativa in questo setting generalizzato. Molti risultati classici si estendono, ma emergono anche fenomeni nuovi: per esempio, per ordinali molto grandi la struttura dei gradi può dipendere da assiomi della teoria degli insiemi che vanno oltre ZFC.

Applicazioni alla Logica Computazionale

La logica computazionale studia le proprietà computazionali delle logiche formali, chiedendo quali problemi logici sono decidibili, quali sono completi per certe classi di complessità, e come la complessità di un problema logico si relaziona alla sua struttura sintattica. La gerarchia aritmetica e i gradi di Turing forniscono strumenti essenziali per questa analisi.

Per esempio, il problema di soddisfacibilità per la logica proposizionale (SAT) è NP-completo, mentre il problema di validità è coNP-completo. Per la logica del primo ordine, il problema di validità è indecidibile ma ricorsivamente enumerabile, dunque Sigma_1-completo. Per la logica del secondo ordine, il problema di validità non è nemmeno ricorsivamente enumerabile, ma è Pi_1-completo. Questi risultati mostrano come la complessità logica aumenti drammaticamente con il potere espressivo del linguaggio.

La logica modale e altre logiche non classiche presentano panorami di complessità diversi ma ugualmente interessanti. Halpern e Moses hanno studiato la complessità della logica epistemica multiagente, mostrando che in certi casi i problemi di validità sono completi per livelli alti della gerarchia aritmetica. Vardi ha analizzato la complessità della logica temporale, trovando connessioni con i gradi di Turing attraverso la teoria degli automi infiniti.

La Gerarchia Aritmetica nella Verifica di Software

Una applicazione moderna della gerarchia aritmetica emerge nella verifica formale di software e hardware. Quando vogliamo provare che un programma soddisfa una specifica, la complessità del problema di verifica dipende dalla complessità della specifica stessa. Specifiche esprimibili in logiche semplici danno origine a problemi decidibili, mentre specifiche più complesse conducono a problemi indecidibili di vari gradi.

Il model checking, una tecnica per verificare automaticamente che un sistema soddisfi una proprietà temporale, ha complessità che dipende dal linguaggio di specifica. Per logiche temporali lineari come LTL, il model checking è decidibile ma può essere complesso. Per logiche temporali ramificate come CTL*, la complessità aumenta. Per logiche del secondo ordine, il model checking può diventare indecidibile con complessità caratterizzabile in termini della gerarchia aritmetica.

Kupferman, Vardi e altri hanno studiato sistematicamente la gerarchia di complessità per problemi di verifica, mostrando che molti problemi naturali sono completi per livelli specifici della gerarchia aritmetica. Questi risultati hanno implicazioni pratiche: suggeriscono quali problemi possono essere risolti efficientemente in pratica e quali richiedono approssimazioni o restrizioni.

Fondamenti Filosofici

Le questioni esplorate in questo saggio hanno anche dimensioni filosofiche profonde. La tesi di Church-Turing, che identifica la calcolabilità intuitiva con la calcolabilità di Turing, è stata oggetto di dibattito filosofico per decenni. La gerarchia aritmetica e i gradi di Turing forniscono una struttura ricca per articolare questioni sulla natura della computazione e della mente.

Alcuni filosofi hanno argomentato che la mente umana può trascendere qualsiasi macchina di Turing, citando il teorema di incompletezza di Gödel come evidenza. Lucas e Penrose hanno sostenuto che la nostra capacità di riconoscere verità aritmetiche non dimostrabili formalmente mostra che non siamo limitati dalla calcolabilità di Turing. Tuttavia, questa argomentazione è controversa: la gerarchia aritmetica mostra che esistono molti livelli di non calcolabilità, e non è chiaro quale livello, se esiste, corrisponda alle capacità cognitive umane.

La definibilità nella seconda aritmetica solleva questioni sul platonismo matematico. Se un insieme è definibile, esiste oggettivamente o è solo una costruzione linguistica? I modelli non standard della seconda aritmetica mostrano che la definibilità dipende dal contesto: un insieme può essere definibile in un modello ma non in un altro. Questo ha implicazioni per il realismo matematico e per la questione se gli oggetti matematici hanno un'esistenza indipendente dalle nostre descrizioni.

Direzioni Future di Ricerca

Guardando al futuro, diverse direzioni promettono sviluppi interessanti. La teoria dei gradi continua a evolversi, con nuove tecniche che permettono costruzioni sempre più sofisticate. L'uso di metodi set-teoretici avanzati, come il forcing iterato e la teoria dei grandi cardinali, potrebbe rivelare nuove proprietà della struttura dei gradi che dipendono da assiomi forti.

La connessione tra calcolabilità e randomness è un'area particolarmente fertile. La teoria delle basi di Schnorr, sviluppata da Binns, Kjos-Hanssen e altri, studia quali gradi possono computare sequenze random o essere computati da esse. Questa teoria ha rivelato una struttura ricca che combina aspetti probabilistici e computazionali in modi inaspettati.

L'applicazione della teoria della calcolabilità alla matematica costruttiva e alla teoria dei topos è un'altra frontiera. I topos effettivi di Hyland forniscono modelli categoriali della calcolabilità che generalizzano molte costruzioni classiche. In questi modelli, la gerarchia aritmetica e i gradi emergono come strutture interne, e lo studio della loro interpretazione categoriale potrebbe rivelare nuove prospettive.

Sintesi e Riflessioni Conclusive

Attraverso questo saggio abbiamo esplorato un territorio vasto e interconnesso della logica matematica e della teoria della calcolabilità. La gerarchia aritmetica, i gradi di Turing, le operazioni di salto e ipersalto, e la definibilità nella seconda aritmetica non sono temi separati ma aspetti diversi di una struttura matematica unificata che descrive i limiti e le possibilità della computazione e della definizione formale.

Abbiamo visto come la gerarchia aritmetica organizzi gli insiemi di numeri naturali in livelli crescenti di complessità definizionale, ciascuno corrispondente a un numero specifico di alternanze di quantificatori. Questa stratificazione non è arbitraria ma riflette distinzioni computazionali genuine: ogni livello della gerarchia contiene problemi che sono intrinsecamente più difficili di quelli dei livelli precedenti, nel senso preciso della riducibilità di Turing.

I gradi di Turing forniscono una misura fine della complessità computazionale relativa, permettendoci di comparare la difficoltà di problemi indipendentemente dalle loro specifiche rappresentazioni. La struttura dei gradi è estremamente ricca, con fenomeni di densità, incomparabilità, e minimalità che rivelano una complessità combinatoria profonda. L'operazione di salto emerge come uno strumento fondamentale per navigare questa struttura, corrispondendo esattamente all'operazione di aggiungere un quantificatore esistenziale a una definizione.

L'ipersalto estende il salto oltre il finito, permettendoci di "saltare attraverso" l'intera gerarchia aritmetica per raggiungere la gerarchia iperartimetica e analitica. Questa generalizzazione mostra che le idee centrali della teoria della calcolabilità si estendono ben oltre il contesto classico dei numeri naturali e delle funzioni ricorsive, applicandosi a oggetti di ordine superiore e a nozioni di calcolabilità transfinita.

La seconda aritmetica fornisce il contesto formale naturale per esprimere tutte queste idee. I suoi sottosistemi corrispondono a frammenti della matematica con forze dimostrative diverse, e lo studio di quale sistema è necessario per dimostrare teoremi specifici ha rivelato una struttura fine nella matematica stessa. La gerarchia dei sottosistemi della seconda aritmetica riflette la gerarchia della complessità computazionale, mostrando ancora una volta come logica e calcolabilità siano profondamente intrecciate.

Le connessioni tra questi temi illuminano questioni fondamentali sulla natura della matematica e della computazione. La corrispondenza tra salti e quantificatori mostra che la complessità logica e la complessità computazionale sono due facce della stessa medaglia. I teoremi di definibilità, come quello di Shore e Slaman, rivelano che proprietà computazionali profonde sono codificate nella struttura ordinale dei gradi, una coincidenza straordinaria che suggerisce principi organizzativi fondamentali.

Questo campo rimane vibrante e pieno di misteri. Le questioni aperte che abbiamo menzionato non sono solo curiosità tecniche ma toccano il cuore della struttura della calcolabilità. Risolvere questi problemi richiederà probabilmente idee nuove, forse provenienti da aree apparentemente lontane della matematica. Ma questo è precisamente ciò che rende la teoria così affascinante: la sua capacità di sorprenderci con connessioni inaspettate e di rivelare ordine dove inizialmente vedevamo solo complessità.

In conclusione, la gerarchia aritmetica e i gradi di Turing, insieme alle operazioni di salto e ipersalto e alla loro espressione nella seconda aritmetica, costituiscono uno dei risultati più eleganti e profondi della matematica del Ventesimo secolo. Esse mostrano che l'apparente dicotomia tra calcolabile e non calcolabile nasconde una struttura infinitamente stratificata di complessità crescente, una gerarchia che riflette i limiti intrinseci di ciò che può essere computato, definito, o dimostrato formalmente. Questa struttura non è solo di interesse tecnico ma tocca questioni filosofiche fondamentali sulla natura della verità matematica,

della conoscenza, e della mente stessa. Il suo studio continua a offrire intuizioni profonde e a ispirare nuove direzioni di ricerca, promettendo che le scoperte future arricchiranno ulteriormente la nostra comprensione dei fondamenti della matematica e del calcolo.